

УДК 622.276.03

А.Л. Ковалев

Фильтрационно-прочностной расчет окрестности ствола вертикальной скважины с использованием критерия пластичности Друкера–Прагера

Ключевые слова:
 модель
 материала пласта,
 фильтрационно-
 прочностной расчет,
 напряженно-
 деформированное
 состояние,
 напряжения,
 деформации.

Keywords:
 model of stratum
 material,
 filtration-strength
 calculation,
 stress-deformed
 condition,
 stresses,
 deformations.

При выборе конструкции забоя скважины в слабосцементированном коллекторе необходимо учитывать возможность разрушения пород, примыкающих к забойному оборудованию, и вынос частиц разрушенного материала с добываемой продукцией. На практике при планировании бурения на новом объекте в первую очередь руководствуются накопленным опытом эксплуатации скважин в схожих условиях. Параллельно ведутся экспериментальные и теоретические исследования по поиску математических моделей неупругого поведения горной породы и совершенствованию методов фильтрационно-прочностных расчетов на основе испытаний керна и данных геофизических исследований (ГИС) о составе пород продуктивного разреза. Важной частью этих исследований являются вычислительные эксперименты, для проведения которых создают специальные исследовательские модели и программы.

В настоящей статье рассматриваются модели горной породы в окрестности необсаженного ствола вертикальной скважины. Модели созданы в Центре исследований нефтегазовых пластовых систем и технологического моделирования ООО «Газпром ВНИИГАЗ» и являются частью расчетного инструментария, используемого при фильтрационно-прочностной оценке конструкций скважин на конкретных объектах. Пористая порода предполагается изотропной, принимается цилиндрическая система координат, вертикальная ось которой совпадает с осью скважины. Рассматриваются установившиеся течения флюида. Предполагается, что граничные условия не зависят от угловых координат. В силу перечисленных допущений все искомые функции зависят от одной переменной – радиуса r .

Математическая модель

Рассматривается область пласта, ограниченная двумя соосными цилиндрическими поверхностями и двумя плоскостями, ортогональными оси цилиндров. Внутренняя цилиндрическая поверхность соответствует поверхности необсаженного ствола скважины, внешняя – выбирается таким образом, чтобы на ней можно было считать затухшим геомеханическое возмущение от вынужденной из ствола породы и фильтрационного потока к нему:

$$R_w \leq r \leq R_f, \quad (1)$$

где R_w, R_f – радиусы внутренней и внешней границ области.

Законы сохранения массы и количества движения в случае установившегося притока флюида к цилиндрической полости принимаются в виде

$$\rho w 2\pi r h = \rho Q = \text{const}, \quad (2)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\mu}{k} w - \beta \rho w |w|, \quad (3)$$

где P – пластовое (поровое) давление; w – скорость фильтрации; h – толщина пласта; ρ, μ – плотность и вязкость; k, β – коэффициенты проницаемости и турбулентности (коэффициент Форхгеймера).

Закон (3) соответствует однофазной фильтрации, но излагаемая расчетная схема позволяет при необходимости учесть и многофазную фильтрацию, для чего следует заменить (3) соответствующей моделью.

В принятой системе координат действуют три главных эффективных (по Терцаги [1]) напряжения – радиальное (σ_r), тангенциальное (σ_ϕ) и осевое (или вертикальное) (σ_z). Суммарный баланс количества движения для флюида и пористой среды записывается в виде (положительными при этом приняты растягивающие напряжения):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{dP}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0. \quad (4)$$

Задача решается для условий плоской деформации. Тензор полных деформаций коаксиален тензору напряжений и полностью определяется перемещением вдоль радиуса – $u(r)$. Радиальная, тангенциальная, осевая и объемная деформации определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\phi = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \epsilon_{z0}, \\ e &= \epsilon_r + \epsilon_\phi + \epsilon_{z0} = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \epsilon_{z0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где ϵ – деформация вдоль соответствующих осей; ϵ_{z0} – начальная деформация вдоль вертикальной оси (в классических задачах плоской деформации принимается равной нулю); e – объемная деформация.

В области упругого состояния напряжения связаны с деформациями законом Гука–Терцаги–Био:

$$\sigma_r = \lambda e + 2G\epsilon_r + \beta_s KP, \quad (6)$$

$$\sigma_\phi = \lambda e + 2G\epsilon_\phi + \beta_s KP, \quad (7)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G\epsilon_{z0} + \beta_s KP, \quad (8)$$

где λ – коэффициент Ламе; G – модуль сдвига; K – модуль объемного сжатия; β_s – сжимаемость материала скелета породы.

Граница упругого и пластического состояний (поверхность течения) описывается критерием Кулона–Мора.

$$f_{C-M} = |\tau| + \text{tg}\phi\sigma_n - S_C = 0, \quad (9)$$

где τ и σ_n – соответственно, касательное и нормальное напряжения, приложенные к площадке

скольжения; S_C – когезия (модуль сцепления); ϕ – угол внутреннего трения. Круг Мора для напряжений, расположенных на поверхности течения, должен касаться прямой (9).

В зоне пластического состояния породы полная деформация складывается из двух частей – упругой, подчиняющейся закону Гука (6)–(8), и остаточной пластической.

$$\epsilon_r = \epsilon_r^e + \epsilon_r^p, \quad \epsilon_\phi = \epsilon_\phi^e + \epsilon_\phi^p, \quad \epsilon_z = \epsilon_z^e + \epsilon_z^p. \quad (10)$$

По условию плоской деформации

$$\epsilon_z = \epsilon_z^e + \epsilon_z^p = \epsilon_{z0}. \quad (10a)$$

Для определения пластических деформаций принят ассоциированный закон, согласно которому эти деформации связаны с поверхностью течения соотношениями

$$\epsilon_r^p = \tilde{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_r}, \quad \epsilon_\phi^p = \tilde{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_\phi}, \quad \epsilon_z^p = \tilde{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_z}, \quad (11)$$

где $\tilde{\lambda}$ – коэффициент пропорциональности.

Попутно отметим, что в описываемой расчетной схеме легко может быть использован и неассоциированный закон пластического течения, для чего в (11) функция пластичности (9) заменяется пластическим потенциалом.

Если взять производную по радиусу от тангенциальной деформации (5) и исключить перемещение, то в результате получим условие совместности

$$\frac{d\epsilon_\phi}{dr} = \frac{\epsilon_r - \epsilon_\phi}{r}. \quad (12)$$

Использование напрямую критерия Кулона–Мора в радиальной задаче сопряжено с определенными трудностями. Дело в том, что касательное и нормальное напряжения в (9) необходимо выразить через два главных напряжения – минимальное и максимальное. Когда главных напряжений всего два, как в задаче со сферической симметрией, проблем с использованием критерия Кулона–Мора не возникает [2]. В радиальной задаче главных напряжений три, минимальным из них (по абсолютной величине) для условий прискважинной области всегда будет радиальное [3]. Остается выбрать из оставшихся двух (тангенциального и осевого) максимальное по абсолютной величине напряжение. Этот выбор может быть серьезно осложнен тем, что в пределах зоны пластических деформаций возможна смена в качестве

максимального одного напряжения на другое. В работах [3, 4] эта проблема решается допущением существования в зоне пластических деформаций некой внутренней зоны, в которой тангенциальное напряжение равно осевому. В настоящей статье была использована аппроксимация критерия Кулона–Мора, известная как соотношение Друкера–Прагера [1], в котором задействованы все три главных напряжения. Для рассматриваемого случая соотношение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} f_{D-P} &= \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - C, \\ I_1 &= \sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z, \\ J_2 &= \frac{1}{6} [(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2], \\ \alpha &= \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 \pm \sin \varphi)}; C = \frac{6 S_C \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 \pm \sin \varphi)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где I_1 и J_2 – первый инвариант тензора напряжений и второй инвариант девиатора тензора напряжений. Знак («+» или «-») в знаменателе выражений для коэффициентов показывает, какая именно поверхность Друкера–Прагера используется для аппроксимации – описанная («+») или вписанная («-»).

Применение соотношения Друкера–Прагера к осесимметричной задаче также вызывает больше трудностей, чем для сферы [5], поскольку связь между напряжениями на поверхности пластического течения перестает быть линейной. Поэтому для решения настоящей задачи был использован численный метод Рунге–Кутты.

Для замыкания математической модели считалось, что заданы поровые давления, радиальное напряжение на внешней границе области (1) и расход флюида. В общем случае существует граница $r = R_p$, разделяющая область упругого состояния материала $R_p \leq r \leq R_f$ и область с остаточными деформациями $R_w \leq r \leq R_f$. Возможны также случаи, когда одна из зон отсутствует и вся область находится в упругом или пластическом состоянии. Для того чтобы выяснить, какой из случаев имеет место, необходимо попытаться «сшить» на границе решения для упругой и пластической зон. При этом для зон решались следующие системы уравнений.

Уравнения для упругой зоны

Напряженно-деформированное состояние в упругой зоне описывается системой дифференциальных уравнений (2)–(4). Если фильтрую-

щуюся жидкость считать несжимаемой (слабосжимаемой) и пренебречь сжимаемостью породы, то указанную систему с учетом (5) можно преобразовать к виду

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\mu q}{2\pi k h r} + \frac{\beta \rho q |q|}{4\pi^2 h^2} \frac{1}{r^2}, \quad (14)$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{\sigma_r - \lambda \left(\frac{u}{r} + \varepsilon_{z0} \right)}{\lambda + 2G}, \quad (15)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{dP}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}. \quad (16)$$

Чтобы замкнуть систему (14)–(16), необходимо добавить выражение для тангенциального напряжения, которое может быть получено из (7) с учетом (5):

$$\sigma_\varphi = \lambda \left(\frac{du}{dr} + \varepsilon_{z0} \right) + (\lambda + 2G) \frac{u}{r}. \quad (17)$$

Для разрешимости системы (14)–(17) к названным выше граничным условиям необходимо добавить радиальное перемещение на внешней границе. Поскольку такое перемещение неизвестно, то задавалось радиальное напряжение на границе упругой и пластической зон, а перемещение подбиралось таким, чтобы решение соответствовало этому и остальным граничным условиям. В частном случае (при отсутствии зоны пластических деформаций) граничным будет нулевое радиальное напряжение на стенке скважины.

Уравнения для пластической зоны

В систему уравнений для пластической зоны также входят уравнения (14) и (16), а кроме того уравнение для тангенциальной деформации, полученное из (12) подстановкой в него выражения для радиальной упругой деформации:

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dr} = \frac{1}{E} \frac{[\sigma_r - \nu(\sigma_\varphi + \sigma_z)] + \varepsilon_r^p - \varepsilon_\varphi}{r}, \quad (18)$$

где E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Чтобы замкнуть систему (14), (16), (18), необходимо добавить выражения для σ_φ , σ_z , и ε_r^p . В качестве таковых используется следующая система уравнений:

$$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - C = 0, \quad (19)$$

$$\left\{ \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\phi)] - \varepsilon_{z0} \right\} (6\alpha\sqrt{J_2} + 2\sigma_r - \sigma_\phi - \sigma_z) + \varepsilon_r^p (6\alpha\sqrt{J_2} - \sigma_r - \sigma_\phi + 2\sigma_z) = 0, \quad (20)$$

$$\left\{ \varepsilon_\phi - \frac{1}{E} [\sigma_\phi - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] \right\} (6\alpha\sqrt{J_2} + 2\sigma_r - \sigma_\phi - \sigma_z) - \varepsilon_r^p (6\alpha\sqrt{J_2} - \sigma_r + 2\sigma_\phi - \sigma_z) = 0. \quad (21)$$

Уравнение (19) получено из (13) для условия пластического течения. Уравнения (20) и (21) – из (10а) и (10) с учетом (11) и (12). Система уравнений (19)–(21) является нелинейной и решается итерационным методом Ньютона.

Система уравнений (14), (16), (18)–(21) решается методом Рунге–Кутты от внутренней границы (стенки скважины). Для ее разрешимости на этой границе достаточно задать ε_ϕ (радиальное напряжение здесь равно нулю, пластовое давление известно, если фильтрационные свойства пласта не зависят от напряжений). Для лучшей сходимости численного метода значения остальных напряжений, входящих в (16) и (18), на внутренней границе можно определить, составив и решив относительно σ_ϕ и σ_z систему из двух уравнений – уравнения (19) и следующего:

$$\frac{1}{E} [\sigma_z - \nu\sigma_\phi] (6\alpha\sqrt{J_2} + 2\sigma_\phi - \sigma_z) + \varepsilon_\phi (6\alpha\sqrt{J_2} - \sigma_\phi + 2\sigma_z) - \frac{1}{E} [\sigma_\phi - \nu\sigma_z] (6\alpha\sqrt{J_2} - \sigma_\phi + 2\sigma_z) + \varepsilon_{z0} (6\alpha\sqrt{J_2} + 2\sigma_\phi - \sigma_z) = 0. \quad (22)$$

Данная расчетная схема справедлива для условий идеальной пластичности, но легко может быть адаптирована и для модели пластичности с упрочнением (билинейной модели). В этом случае когезия (сцепление) не постоянна, а зависит от накопленной в данной точке пластической деформации

$$S_C(\chi) = S_C^e + (S_C^{peak} - S_C^e) \frac{\chi}{\varepsilon_{max}^p},$$

$$\chi = \sqrt{(\varepsilon_r^p)^2 + (\varepsilon_\phi^p)^2 + (\varepsilon_z^p)^2}, \quad (23)$$

где S_C^e – модуль сцепления в состоянии перехода от упругих к пластическим деформациям; S_C^{peak} – модуль сцепления в состоянии максимального напряжения; χ – параметр, характеризующий суммарную пластическую деформацию; ε_{max}^p – максимальная пластическая деформация (деформация разрушения).

Совместное решение для упругой и пластической зон

Как указано выше, параметры пластической зоны можно определить полностью, задав на внутренней границе (стенке скважины) значение единственной переменной – полной тангенциальной деформации. Чтобы «сшить» решение для пластической зоны с решением для упругой зоны, необходимо определить еще один параметр – радиус границы между зонами. Условиями «сшивки» будут являться попарное равенство на границе всех трех напряжений (со стороны каждой из зон) и равенство нулю на границе пластических деформаций.

Указанная задача решалась процедурой подбора названных переменных – полной тангенциальной деформации на стенке скважины и радиуса границы между упругой и пластической зонами – до достижения с заданной точностью равенства напряжений на границе зон и равенства нулю пластической тангенциальной деформации на той же границе.

Примеры расчета

В завершение приведем две серии расчетов. В первой серии сопоставляются три расчета (I, II и III) с идеальной пластичностью, отличающиеся уровнем вертикального (осевого) напряжения на внешней границе. Во второй серии один из вариантов первой серии сопоставляется с соответствующим по осевому напряжению вариантом с упрочнением (билинейная модель). В аппроксимации критерия пластичности использована описанная поверхность Друкера–Прагера. Для простоты в примерах рассматривается нелинейная фильтрация несжимаемой жидкости. Исходные данные для расчетов приведены в таблице. Результаты расчетов представлены на рис. 1–6.

На рис. 1 сопоставляются напряжения в трех расчетах с идеальной пластичностью. Наглядно отображено, что с повышением осевого напряжения на внешней границе увеличивается радиус зоны пластических деформаций. Для осевого напряжения $-330,6$ бар он составляет $1,00$ м, для $-430,6$ бар – $1,12$ м, для $-490,6$ бар – $1,40$ м. В первом случае максимальным главным напряжением на протяжении всей пластической зоны остается тангенциальное напряжение, в двух других на границе упругой и пластической зон максимальным главным является осевое напряжение, в дальнейшем (по мере приближения к стволу скважины) его в этом качестве меняет тангенциальное напряжение.

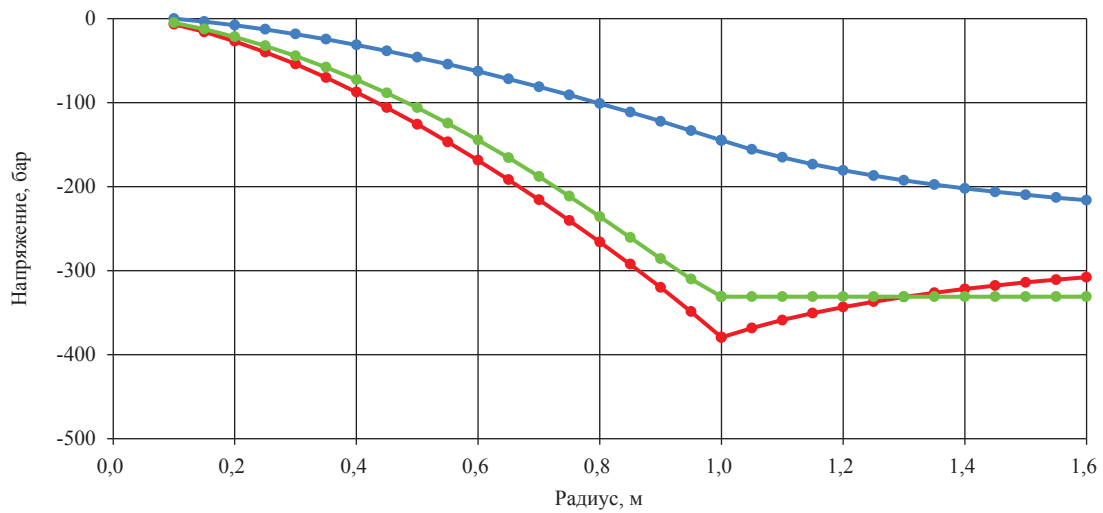
На рис. 2 и 3 для указанных расчетов сопоставляются пластические деформации и перемещения. С увеличением осевого напряжения наблюдается рост этих параметров, и для напряжения $-490,6$ бар они достигают, соответственно, значений 141 (тангенциальная деформация) и $5,46$ м (перемещение). Столь высокие значения деформаций и перемещений указывают на необходимость при использовании модели идеальной пластичности введения связанных с этими параметрами критериев разрушения материала пласта.

На рис. 4–6 сопоставляются напряжения, деформации и перемещения в варианте пластичности с упрочнением (билинейная модель) с осевым напряжением на внешней границе $-430,6$ бар и соответствующем по этому параметру варианте идеальной пластичности. Отображено, что в модели с упрочнением по сравнению с моделью идеальной пластичности сокращается радиус зоны пластичности (до $0,4$ против $1,12$ м), тангенциальное напряжение остается на том же уровне, многократно уменьшаются деформации и перемещения (соответственно, до $2,84$ и $0,11$ м против $112,84$ и $4,37$ м). В отличие от модели идеальной пластичности в модели с упрочнением уже есть критерий разрушения материала – деформация разрушения, по которому можно определить радиус зоны разрушения.

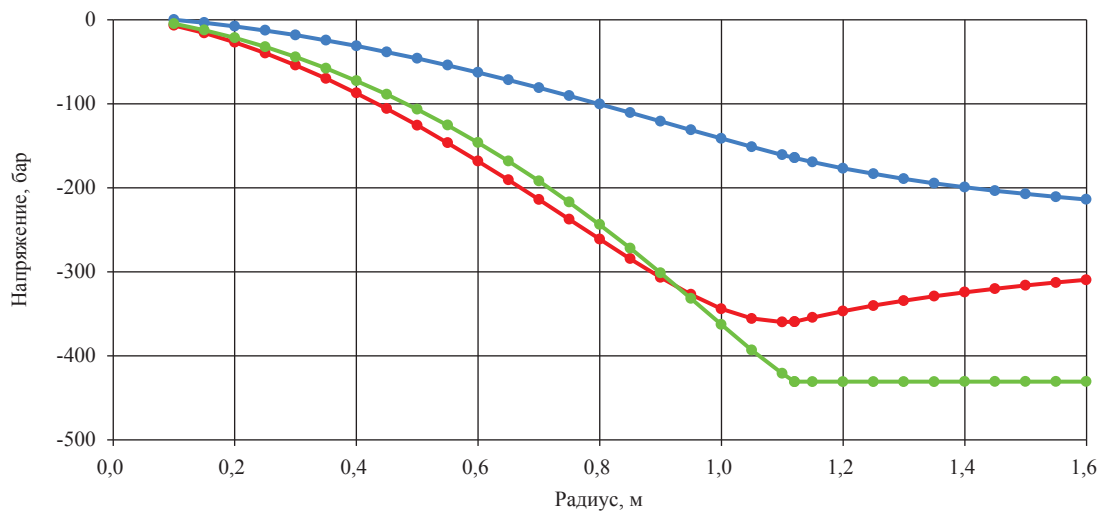
Исходные данные для примеров

Наименование параметра	Единица измерения	Значение			
		ИП I	ИП II	ИП III	БМ
Радиус скважины	м	0,1			
Радиус внешней цилиндрической границы	м	10			
Толщина пласта	м	10			
Проницаемость	Дарси	5			
Коэффициент Форхгеймера	1/см	639504,3			
Дебит жидкости	м ³ /сут	676			
Вязкость жидкости	сП	2			
Плотность жидкости	кг/м ³	800			
Пластовое давление на внешней границе	бар	200			
Горное давление на внешней границе	бар	-460			
Вертикальное (осевое) напряжение на внешней границе	бар	-330,6	-430,6	-490,6	-430,6
Модуль Юнга	бар	20000			
Коэффициент Пуассона	б/р	0,25			
Модуль сцепления при переходе в пластическое состояние	бар	2			
Модуль сцепления при разрушении	бар	–	–	–	4
Угол внутреннего трения	°	25			
Деформация разрушения	б/р	–	–	–	0,25

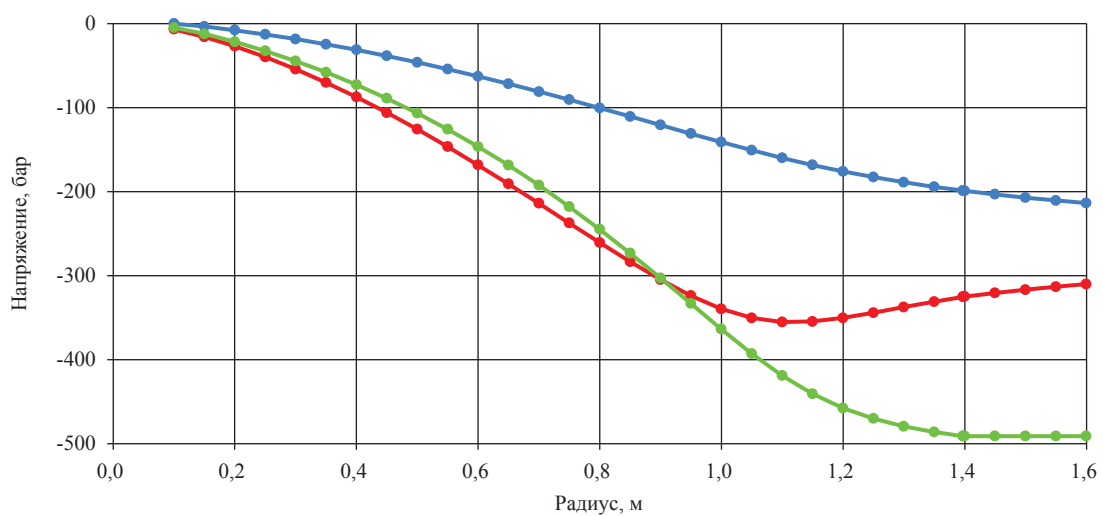
Примечание: ИП – идеальная пластичность, БМ – билинейная модель.



I



II



III

—●— σ_r —●— σ_ϕ —●— σ_z

Рис. 1. Распределение σ_r , σ_ϕ и σ_z в расчетах с идеальной пластичностью (I–III)

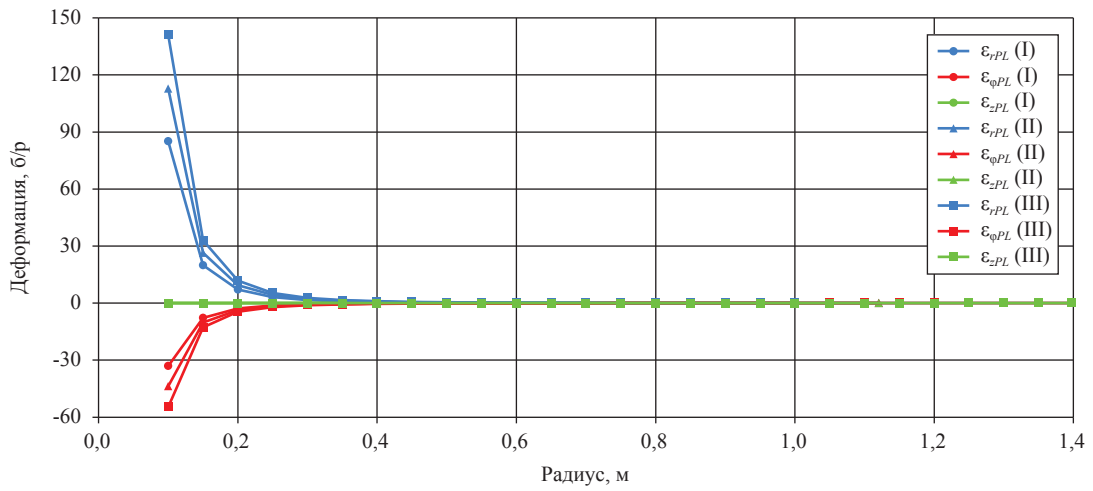


Рис. 2. Распределение пластических деформаций ϵ_{rPL} , $\epsilon_{\phi PL}$ и ϵ_{zPL} в расчетах с идеальной пластичностью (I–III)

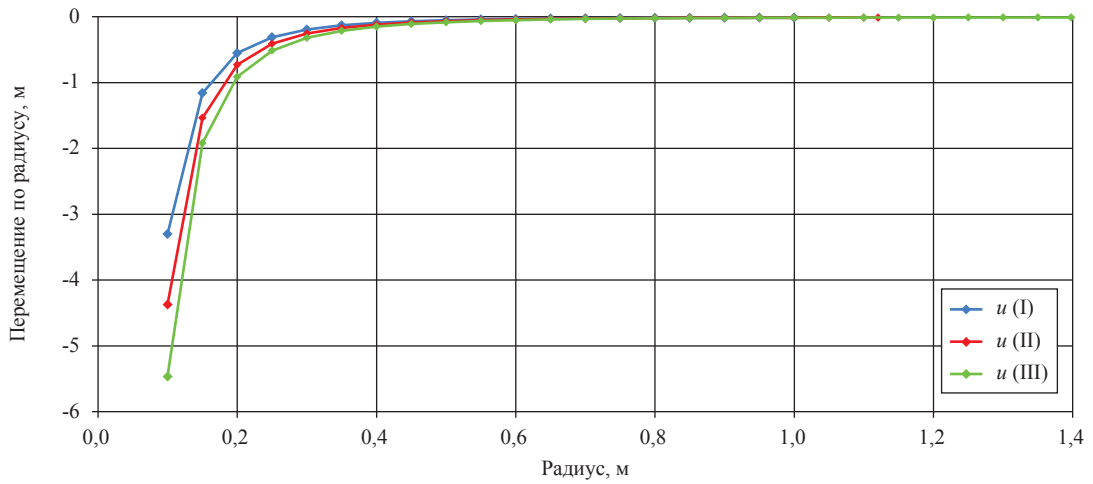


Рис. 3. Распределение u в расчетах с идеальной пластичностью (I–III)

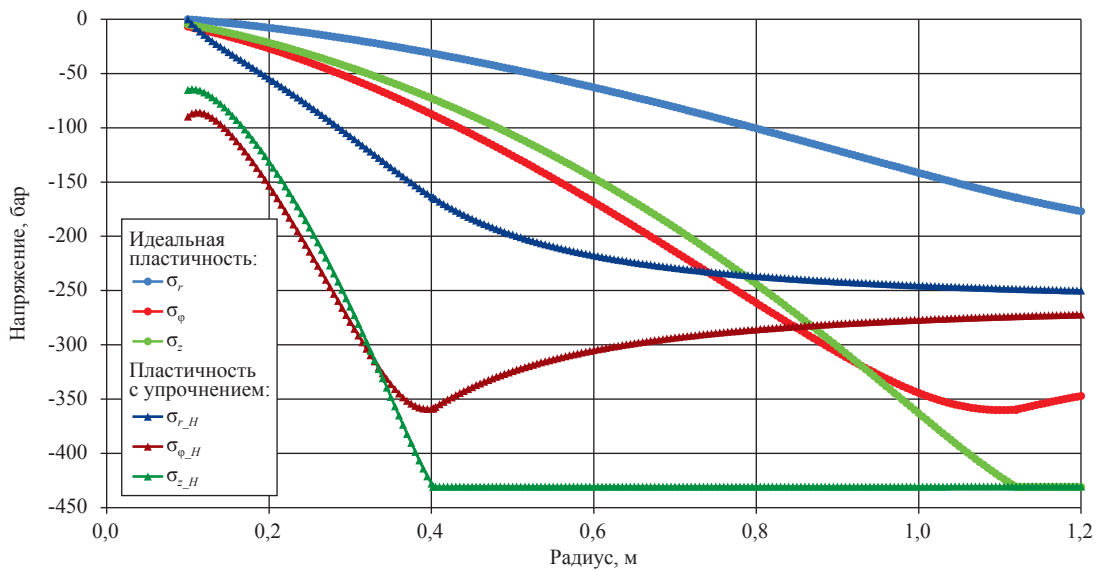


Рис. 4. Сопоставление распределения σ_r , σ_{ϕ} и σ_z в расчетах для идеальной пластичности и пластичности с упрочнением

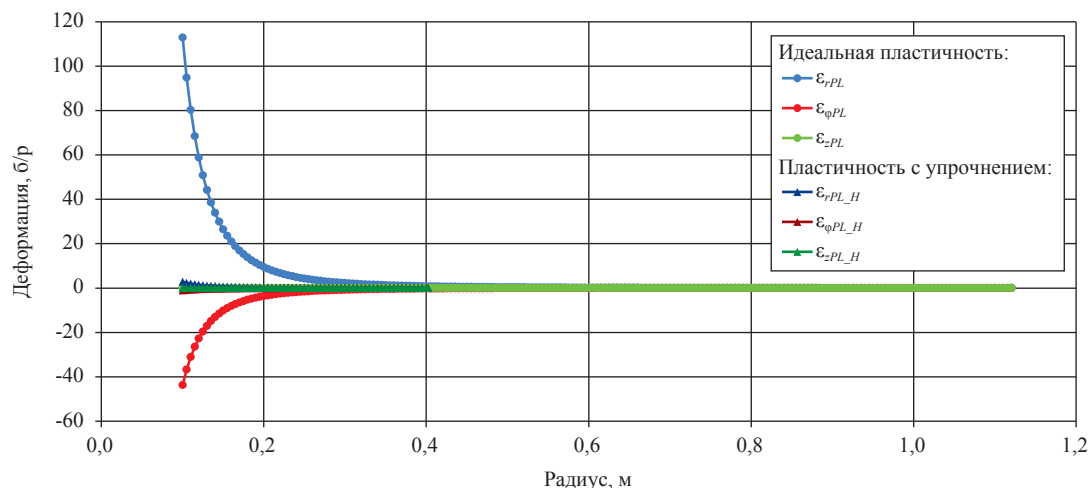


Рис. 5. Сопоставление распределения пластических деформаций ϵ_{rPL} , $\epsilon_{\phi PL}$ и ϵ_{zPL} в расчетах для идеальной пластичности и пластичности с упрочнением

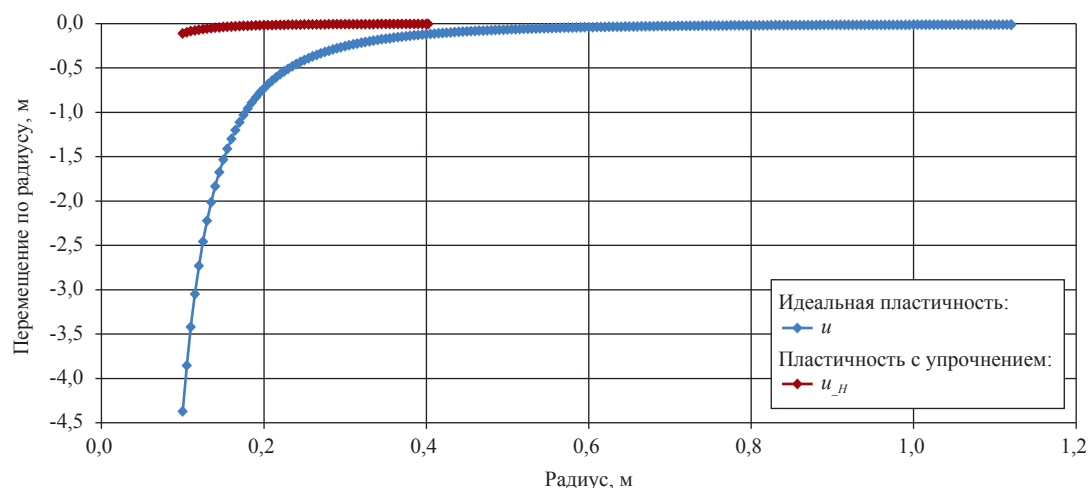


Рис. 6. Сопоставление u в расчетах для идеальной пластичности и пластичности с упрочнением

В заключение на основании рассмотренного материала можно сделать следующие выводы:

- автором предложен комплекс методик для фильтрационно-прочностного расчета напряжений и деформаций, возникающих в горной породе, окружающей необсаженный ствол вертикальной скважины, под действием установившегося течения пластового или закачиваемого флюида;
- указанные методики позволяют учесть линейный и двучленный законы фильтрации, а также многофазность потока;
- расчеты напряженно-деформированного состояния включают определение пластических деформаций, что позволяет использовать различные критерии разрушения, в том числе деформационные.

Список литературы

1. Fjaer E. Petroleum related rock mechanics / E. Fjaer, R.M. Holt, P. Horsrud et. al. – Amsterdam, Oxford: Elsevier, 2008. – 491 p.
2. Bartli R.K. Stability and Failure of Sand Arches / R.K. Bartli, R. Risnes // SPEJ. – April 1981. – P. 236–248.
3. Risnes R. Sand Stresses Around a Wellbore / R. Risnes, R.K. Bartli, P. Horsrud // SPEJ. – December 1982. – P. 883–898.
4. Пятахин М.В. Геомеханические проблемы при эксплуатации скважин / М.В. Пятахин. – М.: Газпром ВНИИГАЗ, 2011. – 266 с.
5. Ковалев А.Л. Фильтрационно-прочностной расчет окрестности перфорационной каверны / А.Л. Ковалев, Е.В. Шеберстов // Актуальные вопросы исследований пластовых систем месторождений углеводородов: сб. науч. ст. – М.: Газпром ВНИИГАЗ, 2012. – С. 117–129. – (Серия «Вести газовой науки»).