

УДК 539.3; 629.12

О модели развития навала льда у преграды

Н.М. Осипенко

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Российская Федерация, 119526, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, к. 1
E-mail: osipnm@mail.ru

Тезисы. В рамках аналогии между движением сыпучей среды и развитием навала представлена разработка модели навала льда на сооружения для различных вариантов движения и разрушения ледяного покрова. Обсуждаются условия, при которых возможен колебательный режим движения навала, а также движение у ограниченной либо протяженной преграды. Результаты работы могут служить основой при разработке и анализе эффективности систем обеспечения безопасности ледостойких сооружений.

Ключевые слова: разрушение, трещина, ледяной покров, навал, ледовые нагрузки, структура разрушения.

Необходимость контроля структуры и коррекции движения ледяного покрова в локальном и региональном масштабах диктуется практикой работ на шельфе арктических морей и задачами обеспечения безопасности [1–4]. Краткий обзор моделей упорядоченного движения и разрушения ледяного покрова в различных граничных условиях приведен Р.В. Гольдштейном и Н.М. Осипенко [5]. Подходы, развитые в механике разрушения материалов, позволяют более полно и рационально анализировать особенности процессов деформирования и разрушения льда и трансформацию структуры ледяного покрова, чтобы получить возможность влиять на них как в локальном, так и в региональном масштабах. Для решения таких задач необходимо изучать природу процессов деформирования и разрушения ледяного покрова, разработать теоретические и расчетные модели, методики и приемы искусственного воздействия, а также тактику мониторинга и оперативного вмешательства в ледовую обстановку.

Настоящая работа является продолжением исследований в области анализа процессов в ледяном покрове с целью разработки методов коррекции механического состояния ледяного покрова. Ниже рассмотрены вопросы упорядоченного движения ледяного покрова с образованием и трансформацией навала у протяженной преграды (конструкции).

Развитие навала у преграды

Расчеты и оценки сценариев формирования навалов льда у сооружений на шельфе в основном базируются на численном анализе начальной стадии процесса [6, 7], при котором основными объектами внимания являются локальные аспекты разрушения наползающих на преграду элементов ледяного покрова и последующее взаимодействие образующихся блоков льда. К продвинутой стадии развития навала удобно подойти с позиций внешней задачи, когда тело навала представляется некоторой квазиоднородной деформируемой средой, конфигурация которой задана эффективными характеристиками такой среды и границами преграды. К подобным подходам можно отнести представление тела навала в виде массива, образованного квазисыпучей средой обломков ледяного поля и поддерживаемого в состоянии предельного равновесия нагрузками со стороны наползающего ледяного поля, имеющего возможность трансформироваться в систему блоков, способную передавать внешние нагрузки. Тело навала, концентрирующееся в области излома опорных плоскостей, в качестве граничных условий получает две (или три) движущиеся под углом друг к другу стенки, с которыми происходит взаимодействие в режиме трения, а с внешней стороны оно ограничено углом естественного откоса эффективной сыпучей среды самого навала. Такая ситуация напоминает движение сыпучего материала во вращающемся барабане [8, 9]. На рис. 1 показана интерпретация аналогии для двух вариантов

опорных плоскостей. Границы полости барабана касаются границ подвижных слоев льда.

Эффективный радиус полости барабана R может быть задан ориентацией плоскостей подвижного слоя. Если, например, профиль опорных плоскостей задан двумя взаимно перпендикулярными плоскостями (см. рис. 1), между которыми находится плоскость, равнонаклоненная к ним и имеющая в сечении длину d , то

$$R = \frac{d}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{90^\circ}{4} \right) \approx 1,207d. \quad (1)$$

В случае двух плоскостей R определяется траекторией оптимального смещения сыпучей массы при нарушении критического равновесия. Такие траектории по форме близки к дуге окружности.

Поскольку процесс движения сыпучего материала в горизонтальном вращающемся барабане характерен для многих технологических задач, ему посвящен ряд публикаций [8–10]. Отметим некоторые факты, необходимые для дальнейшего анализа.

На предыдущем этапе работ выделены режимы движения, в том числе периодические перемещения как единое целое и перекачивание частиц в верхнем слое естественного откоса, при v до 0,1 м/с, эффективном радиусе траектории подъема льда у опоры $R \approx 1 \dots 5$ м и числе Фруда $Fr < 10^{-2}$:

$$Fr = \frac{v^2}{4\pi^2 R}. \quad (2)$$

Далее использован подход, предложенный для режимов, в которых сыпучий материал перемещается в обойме как целое [11, 12]. Если при повороте вокруг оси цилиндра тело с первоначально горизонтальной свободной поверхностью займет позицию с отклонением от горизонта на угол естественного откоса, на контакте с образующей цилиндра появляется скатывающая сила. Она уравнивается силами трения на этой поверхности.

При отклонении тела от начального положения возникает возвращающий погонный момент (M), равный произведению веса сегмента на проекцию расстояния центра тяжести от оси цилиндра на горизонтальную плоскость:

$$M = \frac{2}{3} \rho g R^3 \sin^3 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \beta. \quad (3)$$

где ρ – объемная плотность материала; g – ускорение свободного падения; β – угол наклона тела навала.

Упор, который создает этот момент на контакте с подвижным слоем:

$$N = \frac{M}{R} = \frac{2}{3} \rho g R^2 \sin^3 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \beta. \quad (4)$$

В состоянии предельного равновесия $\beta \rightarrow \theta$, где θ – угол естественного откоса.

Наползающий лед для продолжения движения по опорным плоскостям на границе навала должен преодолеть сопротивление трения между подвижным слоем и опорными

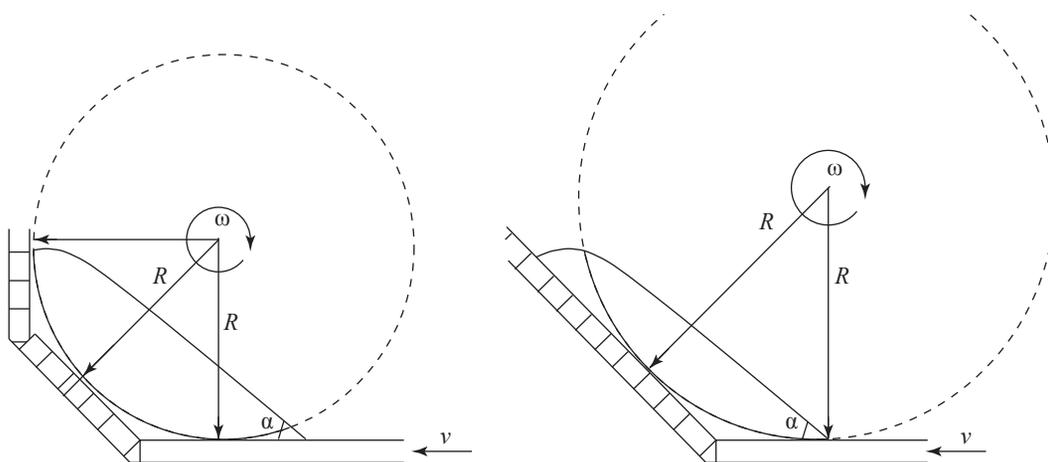


Рис. 1. Эффективные траектории оптимального движения сыпучей массы: ω – скорость вращения барабана; α – центральный угол сегмента в сечении (наполненность цилиндра); v – линейная скорость наполнения

плоскостями, а также упор, создаваемый телом навала. Условие равновесия запишем в виде

$$T = N + F_{\text{тр}}; \quad (5)$$

$$F_{\text{тр}} = \sum_i P_i f_{\text{тр}}, \quad (6)$$

где T – погонная сила на единицу ширины потока льда (рис. 2); $F_{\text{тр}}$ – трение на контакте между подвижным слоем и опорной плоскостью; N – скатывающая сила; P_i – нормальное давление на плоскости скольжения, МПа; $f_{\text{тр}}$ – эффективный коэффициент трения.

Предельные размеры навала

В состоянии предельного равновесия, исчерпание которого приводит к смене механизма навалообразования, погонная сила T обеспечивает вблизи границы навала потерю устойчивости наползающего льда или цепочки блоков (рис. 2). Остановимся на ситуации, когда наползающий лед представляет собой цепочку плотно расположенных блоков льда.

Условие потери устойчивости цепочки весомых упругих стержней (блоков льда) на плоскости (критическая погонная сила $T_{\text{кр}}$) определяется как

$$T_{\text{кр}} = h \sqrt{\frac{l \rho g E}{2}}, \quad (7)$$

где h – толщина льда, м; l – продольный размер блока льда в цепочке, м; E – модуль упругости льда.

Полагая $T_{\text{кр}} = T$, получим соотношение, связывающее основные параметры задачи в момент, когда вследствие потери устойчивости цепочки блоков льда (на подходе к навалу) прекращаются движение льда в область навала по опорной плоскости и, соответственно, рост навала:

$$\sqrt{\rho g R^2} \left(\frac{(\alpha - \sin \alpha) f_{\text{тр}}}{2} + \frac{2}{3} \sin^3 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \theta \right) = h \sqrt{\frac{l E}{2}}. \quad (8)$$

Здесь принято, что трение между подвижным слоем и опорными плоскостями пропорционально весу навала:

$$F_{\text{тр}} = \sum_i P_i f_{\text{тр}} s \approx \frac{\rho g R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha) f_{\text{тр}}. \quad (9)$$

где $s = \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$ – площадь поперечного сечения навала (сегмента круга).

Размер блока контролируется первичным изломом кромки льда под действием поперечной нагрузки:

$$l \approx h^{3/4} \frac{\pi}{4} \sqrt[4]{\frac{E}{3 \rho g}}. \quad (10)$$

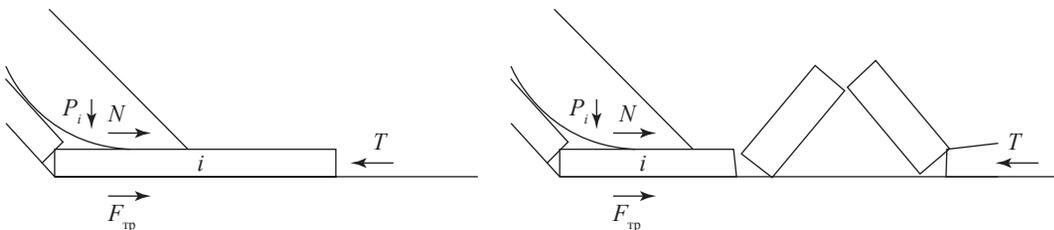


Рис. 2. Схема потери устойчивости линии питания

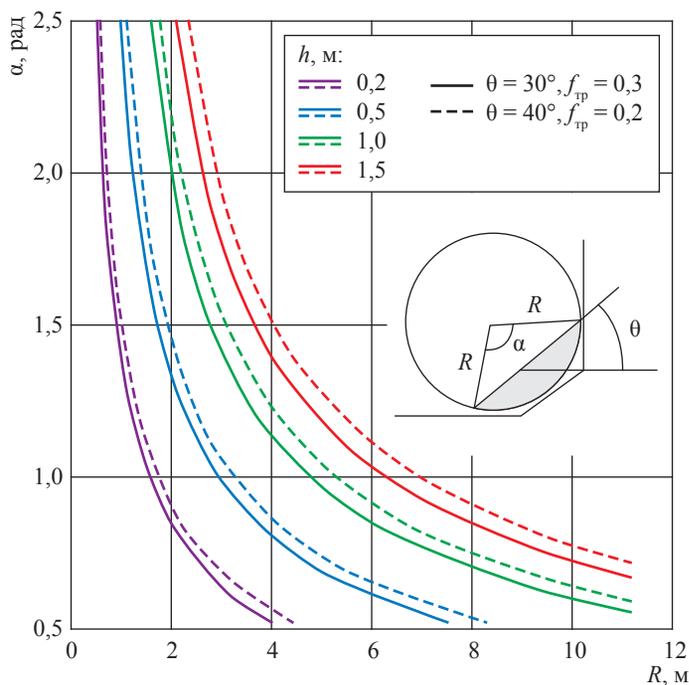


Рис. 3. Взаимосвязь параметров R и α для различных толщин льда и свойств системы

Заметим, что это условие не накладывает ограничений на размеры блоков в среде навала.

На рис. 3 показана взаимосвязь параметров R и α применительно к различным значениям h и двум вариантам свойств системы, а именно: значениям θ и $f_{\text{тр}}$. Видно, что по мере увеличения R предельная заполненность цилиндрической образующей активной части навала (угол α) уменьшается. Разница между показателями α для рассмотренных вариантов свойств характеризует возможное различие предельных параметров навала для одной и той же толщины льда.

Движение в колебательном режиме

Условия колебательного или периодического движения определяются параметрами эффективного трения на границе между подвижным слоем и телом навала $F_{\text{тр}}^1$. Скатывающая сила по мере увеличения угла наклона свободной плоскости навала и приближения его к углу θ должна преодолеть силы трения:

$$N \geq F_{\text{тр}}. \quad (11)$$

Условие, при котором возможны скатывание навала как целого по границе с подвижным слоем к моменту достижения склоном угла естественного откоса и таким образом реализация режима колебательного движения, принимает вид:

$$\frac{2}{3} \sin^3 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \theta \geq \frac{f_{\text{тр}}}{2} (\alpha - \sin \alpha) \cos \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{(\alpha - \sin \alpha)} \theta \right) \quad (12)$$

или

$$f_{\text{тр}} \leq \frac{\frac{4}{3} \sin^3 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \theta}{(\alpha - \sin \alpha) \cos \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)}{(\alpha - \sin \alpha)} \theta \right)}. \quad (13)$$

Если условие не выполняется, в режиме движения ледяного покрова по нормали к преграде продолжается наполнение тела навала вплоть до смены механизма роста навала. Заметим, что это относится только к варианту протяженной по фронту преграды, вдоль которой навал не имеет движений.

Движение при изменении геометрии преграды

Рассмотрим далее ситуацию, в которой ограничение на режим развития навала накладывает поперечный по фронту наполнения льда размер преграды, состоящей по-прежнему из плоских поверхностей с изломом. Если заполнение навала производится, как и ранее, через подвижный пристеночный слой льда, внешняя форма навала определяется условиями скатывания с него блоков льда с образованием естественного откоса. В новой ситуации скатывание возможно также с боковых граней навала. Последнее обстоятельство при малой ширине преграды может ограничить высоту навала и, следовательно, его развитие. Возникает стационарный режим, когда количество поступающего на фронте взаимодействия материала уравнивается количеством материала, скатывающегося в поперечном направлении. В результате навал приобретает форму, близкую к конической, с углом при основании, близким к углу естественного откоса (рис. 4).

Проведем некоторые оценки, полагая, что система подвижного слоя льда между навалом и преградой также способствует развитию скольжения навала как единого тела. Максимальная высота навала оценивается как

$$H_{\max} \approx \frac{w}{2} \operatorname{tg} \theta. \tag{14}$$

Такая же оценка через параметры эффективного цилиндра с сыпучей средой дает

$$H_{\max} \approx 2R \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin \theta. \tag{15}$$

Объединяя эти соотношения, получим связь геометрических характеристик навала в момент образования конической структуры:

$$R = \frac{w}{4 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos \theta}. \tag{16}$$

Далее определим условия инициирования потери устойчивости в наползающем ледяном покрове для этого момента, подставляя формулу (16) в (8). Результат с учетом принятых ранее допущений представлен на рис. 5 для варианта $\theta = 30^\circ$.

По мере увеличения ширины препятствия требующееся для смены механизма навалобразования (потери устойчивости наползающего слоя) наполнение навала (см. θ на рис. 3) уменьшается. При максимально возможном наполнении ($\alpha \rightarrow \pi/2$) ширина препятствия остается конечной. Если реальная ширина препятствия меньше этой величины, достижение условий потери устойчивости слоя надвигающегося льда становится невозможным. При непрерывном движении льда возникает стационарный режим, когда приток льда компенсируется расходом на движение в поперечном направлении. Полученные соотношения показывают,

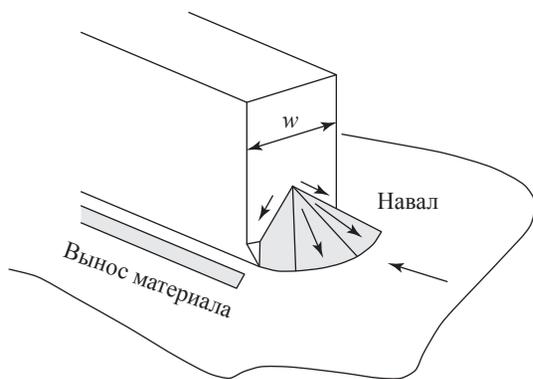


Рис. 4. Вариант сценария навала при ограничении ширины препятствия:
w – ширина преграды

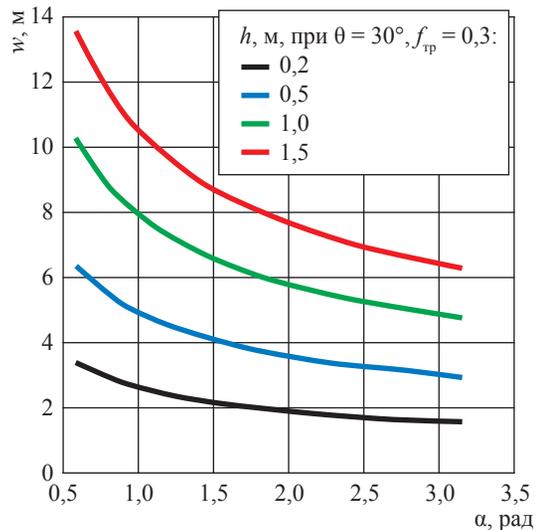


Рис. 5. Связь геометрических характеристик навала и ширины преграды

что характер движения льда в активной фазе навала, его высота и нагрузки, передаваемые на конструкцию, являются функциями геометрических параметров рассматриваемой системы – эффективного радиуса R и ширина преграды w . Адекватный выбор их значений регулирует режим взаимодействия ледяного покрова с преградой.

Движение навала у протяженной преграды

Рассмотрим сценарий развития навала, когда ледяной покров надвигается на протяженную преграду под углом к ее направлению. Здесь возможны другие варианты взаимодействия, связанные с режимами заполнения и расходом в потоке льда. Для участка единичной ширины объем надвигающегося льда оценивается как

$$U_1 = htV \cos \varphi, \quad (17)$$

где V – скорость потока льда, м/мин; t – время, мин; φ – угол отклонения фронта преграды от нормали к потоку льда.

С другой стороны, такой объем участка навала можно представить как функцию угла заполнения

$$U_1 \approx \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha), \quad (18)$$

для малых углов заполнения ($\alpha - \sin \alpha \approx 0,16\alpha^3$).

Если перемещения массы навала вдоль преграды не происходит, накопление ледовых масс можно оценить как

$$\alpha \approx \sqrt[3]{\frac{Vht \cos \varphi}{0,08R^2(1-n)}}. \quad (19)$$

Здесь учтено дополнительно, что в упаковке навала создается некоторая пористость n .

Режим колебательного движения сопровождается перемещением накапливаемой массы навала вдоль фронта преграды, если ее фронт составляет угол с направлением движения ледяного покрова. При этом для достаточно длинного фронта возможен выход на стационарный режим «пропахивания» ледяного покрова, при котором в результате такого перемещения создается устойчивая конфигурация навала, наполненность которого (угол α) возрастает от начала преграды по направлению к ее концу. Из простых геометрических условий для стационарного режима, в котором вся масса навала перемещается вдоль границы контакта, а количество поступившего материала (льда)

по всей активной длине фронта преграды равно количеству удаляемого материала на конце, получим следующую оценку угла заполнения для прямолинейного фронта преграды:

$$\alpha \approx \sqrt[3]{\frac{x^2 h \sin \varphi \cos \varphi}{0,16R^2(1-n)}}, \quad (20)$$

где x – расстояние от начала преграды.

Заметим, что при расчете такого рода процессов могут быть полезны подходы, предложенные в задачах о движении сыпучей среды в наклонном вращающемся барабане [8]. Полученные выражения (19) и (20) демонстрируют увеличение наполненности навала (эффективного барабана) при развитии процесса во времени или по длине преграды.

Обращаясь к рис. 6, на котором отражена функция (13) при разных значениях угла естественного откоса θ , проиллюстрируем смену режима движений в среде навала при увеличении его наполненности. При фиксированном уровне коэффициента трения $f_{\text{тр}}^1$ по мере возрастания наполненности навала α (см. стрелку на рис. 6) происходит переход от режима колебательного движения навала как целого с перемещением массы льда вдоль области контакта к торможению массы навала и дальнейшему увеличению его наполненности путем перекачивания блоков льда по наружной поверхности. Наконец, при достижении горизонтальной нагрузки на входе в навал критических условий потери устойчивости надвигающегося слоя льда (условие (11) – на рис. 6 граница

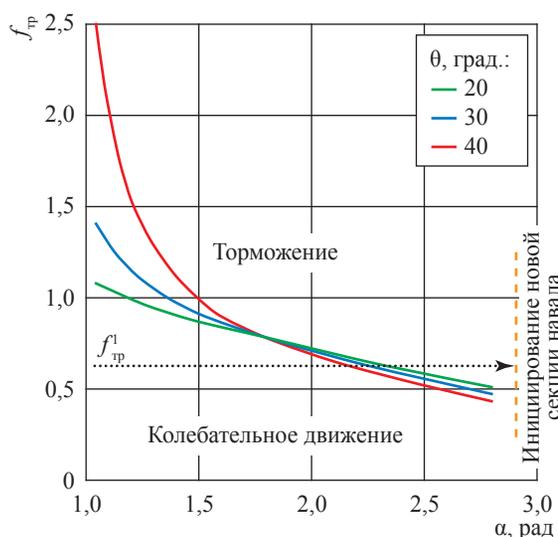


Рис. 6. Смена режима движений в среде навала при увеличении его наполненности

показана условно оранжевым пунктиром), происходит инициирование новой секции навала, формирующего траекторию движения (линию питания) на контакте с внешней поверхностью ранее образованного фрагмента навала. Ее развитие непосредственной связи с конструкцией преграды не имеет.

Такая смена режима происходит при любой ориентации границы протяженной преграды относительно вектора движения ледовых масс. При этом при надвигании льда по нормали к границе преграды цикл смены режима приводит к появлению вторичных структур навала перед фронтом первичного навала. Для движения под углом возможны режимы, в которых из-за движения массива навала вдоль преграды в области выступа преграды навстречу движению льда не происходит накопления ледовых масс, которые перемещаются в дальний конец преграды, тем самым усиливая нагрузку на преграду в этой части.

Таким образом, представлены основы модели развития навала, образованного квазисыпучей средой обломков ледяного поля у преграды (конструкции) при ограничении ее размеров и ориентации. Показана возможность реализации сценариев колебательного режима движения навала, в том числе при движении ледовых масс вдоль протяженной преграды.

Работа проведена при поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 1.32П.

Список литературы

1. Костылев А.И. Мировой опыт изучения методов управления ледовой обстановкой / А.И. Костылев, К.Е. Сазонов // Арктика: экология и экономика. – 2016. – № 3 (23). – С. 86–97.
2. Bakkay B. El. Efficiency of ice management for Arctic offshore operations / B.El. Bakkay, E. Coche, K. Riska // ASME 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering. – 2014. – Т. 10: Polar and Arctic Science and Technology. – № OMAE2014-24038. – С. V010T07A041. – DOI: 10.1115/ OMAE2014-24038.
3. Гольдштейн Р.В. Вопросы механики разрушения льда и ледяного покрова при анализе ледовых нагрузок / Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко // Вести газовой науки: Современные подходы и перспективные технологии в проектах освоения нефтегазовых месторождений российского шельфа. – М.: Газпром ВНИИГАЗ, 2013. – № 3 (14). – С. 104–112.
4. Гольдштейн Р.В. Управление движением и структурой разрушения ледяного покрова / Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко // Всероссийская конференция с международным участием «Арктика: нефть и газ – 2015», 22 апреля 2015. – М.: РГУНИГ им. И.М. Губкина. – С. CD.
5. Гольдштейн Р.В. Структура разрушения морского ледяного покрова при ограничении движения / Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко // Материалы 3-й Международной научной конференции «Полярная механика», 27–30 сентября 2016. – Владивосток. – С. 472–482.
6. Timco G.W. What is the maximum pile-up height for ice? / G.W. Timco, A. Barker // Proceedings of the 16th IAHR International Symposium on Ice «Ice in the Environment». – New Zealand, Dunedin, 2002.
7. Paavilainen J. Parameter effects on simulated ice rubbing forces on a wide sloping structure / J. Paavilainen, J. Tuhkuri // Cold Regions Science and Technology. – 2012. – Т. 81. – С. 1–10.
8. Першин В.Ф. Переработка сыпучих материалов в машинах барабанного типа / В.Ф. Першин, В.Г. Однолюк, С.В. Першина. – М.: Машиностроение, 2009. – 220 с.
9. Науменко Ю.В. Определение параметров привода горизонтальных барабанных машин, частично заполненных обрабатываемым материалом / Ю.В. Науменко // Лесной журнал. – 2002. – № 5. – С. 68–76.
10. Голованов Ю.В. Обзор современного состояния механики быстрых движений гранулированных материалов / Ю.В. Голованов, И.В. Ширко // Механика гранулированных сред. Теория быстрых движений. – М.: Мир, 1985. – С. 271–279.
11. Luding S. Simulation of dense granular flow: Dynamic arches and spin organization / S. Luding, J. Duran, E. Clement et al. // *Journal de Physique I*. – 1996. – Т. 6. – № 6. – С. 823. – DOI: <https://doi.org/10.1051/jp1:1996244>.
12. Rutgers R. Longitudinal mixing of granular material flowing through a rotary cylinder: part I-Description and theoretical / R. Rutgers // Chem. Eng. Sci. – 1965. – № 20. – С. 1079.

About a pattern of ice bulk evolution nearby an obstacle

N.M. Osipenko

A.Yu. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, RAS, Bld. 1, Est. 101, Prospekt Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation
E-mail: osipnm@mail.ru

Abstract. In the framework of analogy between movement of a granular medium and development of a bulk, a pattern of ice piling over structures for various variants of motion and destruction of the ice cover is suggested. Conditions providing an oscillatory regime of bulk motion, as well as motion of a limited and extended obstacle are discussed. The results of the work can become a foundation for design and performance analysis of safety systems for ice-resistant structures.

Keywords: fracture, crack, ice cover, ice loads, contact.

References

1. KOSTYLEV, A.I., K. Ye. SAZONOV. World practice in studying methods for control of ice situation [Mirovoy opyt izucheniya metodov upravleniya ledovoy obstanovkoy]. *Arktika: Ekologiya i Ekonomika*. 2016, no. 3 (23), pp. 86–97. ISSN 2223-4594. (Russ.).
2. BAKKAY, B.EL., E. COCHE, K. RISKKA. Efficiency of ice management for Arctic offshore operations. In: *ASME 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. 2014, vol. 10: Polar and Arctic Science and Technology, no. OMAE2014-24038, pp. V010T07A041. DOI: 10.1115/OMAE2014-24038.
3. GOLDSHTEIN, R.V., N.M. OSIPENKO. Issues of mechanical process of ice and ice cover destruction in analysis of ice loads [Voprosy mekhaniki razrusheniya lda i ledyanogo pokrova pri analize ledovykh nagruzok]. *Vesti Gazovoy Nauki*. Moscow: Gazprom VNIIGAZ LLC, 2013, no. 3 (14): Modern approaches and advanced technologies in projects of development of Russian offshore oil-and-gas fields, pp. 104–112. ISSN 2306-8949. (Russ.).
4. GOLDSHTEIN, R.V., N.M. OSIPENKO. Controlling motion and structure of ice cover wreckage [Upravleniye dvizheniyem i strukturoy razrusheniya ledyanogo pokrova]. In: *Proc. of the All-Russia conference with international participation "The Arctic: oil and gas –2015"*, 22 April 2015, Moscow, Gubkin Russian State University of Oil and Gas [CD]. (Russ.).
5. GOLDSHTEIN, R.V., N.M. OSIPENKO. Structure of sea ice cover demolition in case of motion is limited [Struktura razrusheniya morskogo ledyanogo pokrova pri ogranichenii dvizheniya]. In: *Proc. of the 3rd International scientific conference "Polar mechanics"*, 27–30 September, 2016, Vladivostok, pp. 472–482. (Russ.).
6. TIMCO, G.W., A. BARKER. What is the maximum pile-up height for ice? In: *Proc. of the 16th IAHR International Symposium on Ice "Ice in the Environment"*. New Zealand, Dunedin, 2002.
7. PAAVILAINEN, J., J. TUHKURI. Parameter effects on simulated ice rubbing forces on a wide sloping structure. *Cold Regions Science and Technology*. September 2012, vol. 81, pp. 1–10. ISSN 0165-232X.
8. PERSHIN, V.F., V.G. ODNOLKO, S.V. PERSHINA. *Treatment of bulk solids in drum-type machines* [Pererabotka sypuchikh materialov v mashinakh barabannogo tipa]. Moscow: Mashinostroyeniye, 2009. (Russ.).
9. NAUMENKO, Yu.V. Determining parameters of driver gears for horizontal drum-type machines, partially filled with worked stock [Opredeleniye parametrov privoda gorizontalnykh barabannykh mashin, chastichno zapolnennykh obrabatyvayemym materialom]. *Lesnoy Zhurnal*. 2002, no. 5, pp. 68–76. ISSN 0536-1036. (Russ.).
10. GOLOVANOV, Yu.V., I.V. SHARKO. Review of contemporary fast-motion mechanics of molding grains [Obzor sovremennoy sostoyaniya mekhaniki bystrykh dvizheniy granulirovannykh materialov]. In: *Mechanics of granulated media. A theory of rapid motions* [Mekhanika granulirovannykh sred. Teoriya bystrykh dvizheniy]: collected book. Moscow: Mir, 1985, pp. 271–279. (Russ.).
11. LUDING, S., J. DURAN, E. CLEMENT et al. Simulation of dense granular flow: Dynamic arches and spin organization. *Journal de Physique I*. 1996, vol. 6, no. 6, pp. 823. DOI: <https://doi.org/10.1051/jp1:1996244>. ISSN 1155-4304.
12. RUTGERS, R. Longitudinal mixing of granular material flowing through a rotary cylinder: part I-Description and theoretical. *Chem. Eng. Sci.* 1965, no. 20, pp. 1079. ISSN 0009-2509.